ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Δίνεται καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$:

$$c(t) = \left(t - \sqrt{3}\sin t,\ 2\cos t,\ \sqrt{3}\,t + \sin t \right),\ t \in \mathbb{R}$$

i) Να εξεταστεί ως προς την κανονικότητα

ii) Να βρεθεί τη συνάρτηση μήκους τόξου της c

iii) Να βρεθεί την αναπαραμέτρηση της c με παράμετρο το μήκος τόξου

iv) Να υπολογιστεί η καμπυλότητα και τη στρέψη της, συναρτήσει του t και του μήκους τόξου s

v) Να υπολογιστεί το πλαίσιο Frenet, συναρτήσει του t και του μήκους τόξου.

ΛΥΣΗ

i) $c'(t) = (1 - \sqrt{3}\cos t,\ -2\sin t,\ \sqrt{3} + \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$

$\|c'(t)\| = 2\sqrt{2} > 0 \implies$ Η c κανονική

ii) $s(t) = \int_0^t \|c'(\sigma)\|\,d\sigma = 2\sqrt{2}\,t$, $t \in \mathbb{R}$

iii) $s = 2\sqrt{2}\,t \Rightarrow t = \dfrac{s}{2\sqrt{2}}$, $s = s(t)$

$$c(s) = \left(\frac{s}{2\sqrt{2}} - \sqrt{3}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}},\ 2\cos\frac{s}{2\sqrt{2}},\ \sqrt{3}\,\frac{s}{2\sqrt{2}} + \sin\frac{s}{2\sqrt{2}} \right)$$

iv) Διχως φυσική παράμετρο (δηλ. για το t):

$$k(t) = \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3} \quad (1)$$

$$\|c'(t)\| = 2\sqrt{2} \Rightarrow \|c'(t)\|^3 = 16\sqrt{2}$$

$$c''(t) = (\sqrt{3}\sin t, -2\cos t, -\sin t),\ t\in\mathbb{R}$$

$$c'(t)\times c''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1-\sqrt{3}\cos t & -2\sin t & \sqrt{3}+\cos t \\ \sqrt{3}\sin t & -2\cos t & -\sin t \end{vmatrix} =$$

$$= \left(2\sin^2 t + 2\sqrt{3}\cos t + 2\cos^2 t,\ 3\sin t + \cancel{\sqrt{3}\sin t\cos t} + \sin t - \cancel{\sqrt{3}\cos t\sin t},\right.$$
$$\left. -2\cos t + 2\sqrt{3}\cos^2 t + 2\sqrt{3}\sin^2 t \right) =$$

$$= (2 + 2\sqrt{3}\cos t,\ 4\sin t,\ 2\sqrt{3} - 2\cos t).$$

$$\|c'(t)\times c''(t)\| = \sqrt{(2+2\sqrt{3}\cos t)^2 + 16\sin^2 t + (2\sqrt{3}-2\cos t)^2} =$$

$$= \sqrt{4 + \cancel{8\sqrt{3}\cos t} + 12\cos^2 t + 16\sin^2 t + 12 - \cancel{8\sqrt{3}\cos t} + 4\cos^2 t} =$$

$$= \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Άρα, η (1) γίνεται: $K(t) = \dfrac{4\cancel{\sqrt{2}}}{16\cancel{\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{4}$.

Με φυσική παράμετρο (το μήκος τόξου).

$$c(s) = \left(\frac{s}{2\sqrt{2}} - \sqrt{3}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}},\ 2\cos\frac{s}{2\sqrt{2}},\ \sqrt{3}\frac{s}{2\sqrt{2}} + \sin\frac{s}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$\dot{c}(s) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos\frac{s}{2\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{s}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$\ddot{c}(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{8}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}},\ -\frac{1}{4}\cos\frac{s}{2\sqrt{2}},\ -\frac{1}{8}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$K(s) := \|\ddot{c}(s)\| = \sqrt{\frac{3}{64}\cdot\sin^2\frac{s}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{16}\cdot\cos^2\frac{s}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{64}\sin^2\frac{s}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}$$

Η στρέψη ως προς τη φυσική παράμετρο s μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$\tau = \langle \dot{\vec{n}}, \vec{b} \rangle = - \langle \vec{n}, \dot{\vec{b}} \rangle \quad (1)'$$

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s) \quad (2)'$$

β' τρόπος: Χρήση του τύπου

$$\tau(s) = \frac{(\dot{c}(s), \ddot{c}(s), \dddot{c}(s))}{\kappa^2}$$

όπου $\kappa > 0 \ \forall s$.

$$\vec{n}(s) = \frac{\ddot{c}(s)}{\kappa(s)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\frac{s}{2\sqrt{2}}, -\cos\frac{s}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$\vec{t}(s) = \frac{\dot{c}(s)}{\|\dot{c}(s)\|} \overset{\|\dot{c}(s)\|=1}{=\!=\!=} \dot{c}(s), \quad s \in \mathbb{R}$$

$$(2)': \vec{b}(s) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos\frac{s}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{s}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}} & -\cos\frac{s}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos\frac{s}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{s}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$\dot{\vec{n}}(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\cos\frac{s}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{4\sqrt{2}}\cos\frac{s}{2\sqrt{2}} \right), \quad s \in \mathbb{R}$$

$$(1)': \tau = \langle \dot{\vec{n}}, b \rangle = \frac{3}{16}\cos^2\frac{s}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\sin^2\frac{s}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{16}\cdot\cos^2\frac{s}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$$

Ενώ, η στρέψη για την τυχαία παράμετρο t υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\tau(t) = \frac{(c'(t), c''(t), c'''(t))}{\|c'(t) \times c''(t)\|^2} = \ldots = \frac{1}{4}$$

όπου:

$$\begin{cases} \dot{c}(s) = \dot{t}(s) \cdot c'(t) \\ \ddot{c}(s) = \ddot{t}(s) \cdot c'(t) + (\dot{t})^2 \cdot c''(t) \\ \dddot{c}(s) = \dddot{t}(s)\, c'(t) + 3\dot{t}\cdot\ddot{t}\cdot c''(t) + (\dot{t})^3 \cdot c'''(t) \end{cases}$$

οι μετασχηματισμοί από την s στην παράμετρο t.

v) Θέλαμε να υπολογίσαμε τα διανύσματα $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$

- <u>ως προς το μήκος τόξου:</u>

το επίεδρο frenet $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$ έχει υπολογιστεί στα προηγούμενα ερωτήματα.

- <u>ως προς την τυχαία παράμετρο:</u>

$$\vec{t}(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos t\right)$$

$$\vec{b}(t) = \frac{c'(t)\times c''(t)}{\|c'(t)\times c''(t)\|} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)$$

και

$$\vec{n}(t) = \vec{b}(t)\times\vec{t}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos t & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos t & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos t \end{vmatrix} = \ldots$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η:

Δίνεται η καμπύλη $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ (κυκλική έλικα)

$c(t) = (r\cos t, r\sin t, bt)$, $r > 0$ $b \in \mathbb{R}^*$

i) Να βρεθεί αναπαραμέτρηση $\tilde{c}$ της c με μοναδιαία ταχύτητα

ii) Να βρεθούν η καμπυλότητα και η στρέψη της $\tilde{c}$

iii) Να δειχθεί ότι η γωνία θ μεταξύ εφαπτομένης σε κάθε σημείο της c και του $z'Oz$ άξονα είναι σταθερή

iv) Να δειχθεί ότι η γωνία φ μεταξύ της δεύτερης καθέτου σε κάθε σημείο της c και του $z'Oz$ άξονα είναι σταθερή

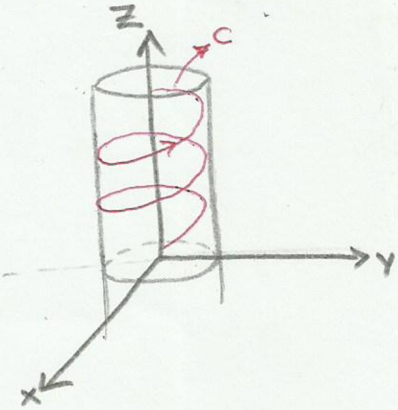
ΛΥΣΗ

i) Είναι $c'(t) = (-r\sin t, r\cos t, b)$, $r > 0$ και $b \in \mathbb{R}^*$

$\|c'(t)\| = (r^2 + b^2)^{1/2} = \rho > 0$

Έστω $S : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ με $S(t) = \int_0^t \|c'(\sigma)\| d\sigma = t$

όπου $S = t \cdot \rho \Rightarrow t = \frac{S}{\rho}$



$c(S) = \left(r\cos\frac{S}{\rho}, r\sin\frac{S}{\rho}, b \cdot \frac{S}{\rho}\right)$

ii) $\dot{c}(s) = \vec{t}(s) = \left(-\frac{r}{\rho}\sin\frac{s}{\rho}, \frac{r}{\rho}\cos\frac{s}{\rho}, \frac{b}{\rho}\right)$

$\ddot{c}(s) = \dot{\vec{t}}(s) = \left(-\frac{r}{\rho^2}\cos\frac{s}{\rho}, -\frac{r}{\rho^2}\sin\frac{s}{\rho}, 0\right)$

Ορισμός: $K(s) := \|\dot{\vec{t}}(s)\| = \frac{r}{\rho^2} \neq 0$ ← Καμπυλότητα

Σχετικά με τη στρέψη:

$\vec{n}(s) = \frac{1}{K(s)} \dot{\vec{t}}(s) = \left(-\cos\frac{s}{\rho}, -\sin\frac{s}{\rho}, 0\right)$

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s) = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{b}{\rho}\sin\frac{s}{\rho}, -\frac{b}{\rho}\cos\frac{s}{\rho}, \frac{r}{\rho}\right)$$

οπότε

$$\mathring{\vec{b}}(s) = \left(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{\rho}, \frac{b}{\rho^2}\sin\frac{s}{\rho}, 0\right)$$

και

$$t(s) = -\langle \vec{n}(s), \mathring{\vec{b}}(s) \rangle = \frac{b}{\rho^2}.$$

iii) $$\cos\theta = \frac{\langle \vec{t}(s), \vec{z}_0 \rangle}{\|\vec{t}(s)\| \cdot \|\vec{z}_0\|} = \langle \vec{t}(s), \vec{z}_0 \rangle = \frac{b}{\rho} = \text{σταθ}$$

iv) $$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{b}(s), \vec{z}_0 \rangle}{\|\vec{b}(s)\| \cdot \|\vec{z}_0\|} = \langle \vec{b}(s), \vec{z}_0 \rangle = \frac{r}{\rho} = \text{σταθ}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Να δειχθεί ότι η καμπύλη με φυσική παράμετρο

$c: I \to \mathbb{R}^3$ με $c(s) = \left(\frac{4}{5}\cos s,\ 1-\sin s,\ -\frac{3}{5}\cos s\right)$

είναι κύκλος. Έπειτα, να βρεθεί η ακτίνα και το κέντρο του κύκλου και το επίπεδο στο οποίο κείται

ΛΥΣΗ

Αρκεί νδο $\kappa(s) = \|\ddot{\beta}(s)\| = c$, όπου c: θετική σταθερά και ότι η καμπύλη β είναι επίπεδη ($\Leftrightarrow \tau = 0$)

Υπολογίζουμε,

$$\|\dot{\beta}(s)\| = \sqrt{\frac{16}{25}\sin^2 s + \cos^2 s + \frac{9}{25}\sin^2 s} = 1$$

(Μοναδιαίο διάνυσμα ταχύτητας)

$$\|\ddot{\beta}(s)\| = \sqrt{\frac{16}{25}\cos^2 s + \sin^2 s + \frac{9}{25}\cos^2 s} = 1$$

(Μοναδιαίο διάνυσμα επιτάχυνσης)

Άρα, $\kappa(s) = 1 > 0$

Αρκεί, τώρα νδο $\tau(s) = 0$

$$\vec{n}(s) = \frac{\ddot{\beta}(s)}{\kappa(s)} \overset{\kappa(s)=1}{=\!=} \ddot{\beta}(s) \Rightarrow \dot{\vec{n}}(s) = \dddot{\beta}(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{n}}(s) = \left(\frac{4}{5}\sin s,\ \cos s,\ -\frac{3}{5}\sin s\right) = -\vec{t}(s) = -\dot{\beta}(s)$$

Επομένως, παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dddot{\beta}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και άρα $(\dot{\beta}(s), \ddot{\beta}(s), \dddot{\beta}(s)) = 0$

Συνεπώς, $\tau(s) = \dfrac{(\dot{\beta}(s), \ddot{\beta}(s), \dddot{\beta}(s))}{\kappa(s)^2} = 0$

Έτσι, η καμπύλη b μηδενικής στρέψης και θετικής καμπυλότητας εκφράζει κύκλο με ακτίνα

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)} = \frac{1}{1} = 1$$

Το κέντρο του κύκλου δίνεται από:

$$b = b(0) + \frac{1}{\kappa(s)} \vec{n}(0) = b(0) + \vec{n}(0) = (0,1,0)$$

Το διάνυσμα $\vec{t}(0) \times \vec{n}(0) = \vec{b}(0) = -\frac{1}{5}(3,0,4)$

είναι κάθετο στο επίπεδο των $\vec{t}(0)$ και $\vec{n}(0)$

Άρα, έχουμε την εξίσωση του επιπέδου:

$$(\Pi): \ 3(x-0) + 0\cdot(y-0) + 4(z-0) = 0 \Rightarrow 3x + 4z = 0$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η :

Να αποδείξετε ότι εάν όλα τα κάθετα επίπεδα μιας καμπύλης a περνάνε από ένα σημείο p_0, τότε η a περιέχεται σε μία σφαίρα με κέντρο το p_0.
(Υποδ. παραγώγιση στην $<a(s)-p_0, a(s)-p_0>$).

ΛΥΣΗ

ΕΡΓΑΣΙΑ/ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Να αποδειχθεί ότι όλα τα κάθετα επίπεδα της καμπύλης: $\beta(t)=(a\sin^2 t, a\sin t\cos t, a\cos t)$ $t\in\mathbb{R}$ διέρχονται από το $(0,0,0)$.

Έστω συνάρτηση

$$F(s)=<a(s)-p_0, a(s)-p_0>$$

Παραγωγίζουμε την F

$$\dot{F}(s)=2<\dot{a}(s), a(s)-p_0>.$$

$\dot{a}(s)\perp$ στο κάθετο επίπεδο της $a(s)$

p_0 σημείο του τυχόντος καθέτου επιπέδου

το επίπεδο θα έχει τη μορφή

$$<\dot{a}(s), (x,y,z)-p_0>=0 \quad (1)$$

Αλλά, το $a(s)$ ικανοποιεί την (1)

Άρα, μετασχηματίζεται σε

$$<\dot{a}(s), a(s)-p_0>=0, \ \forall s$$

Συνεπώς, $\dot{F}(s)=0 \Rightarrow F(s)=\sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow <a(s)-p_0, a(s)-p_0>=\sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \|a(s)-p_0\|^2=\sigma\tau\alpha\theta.$

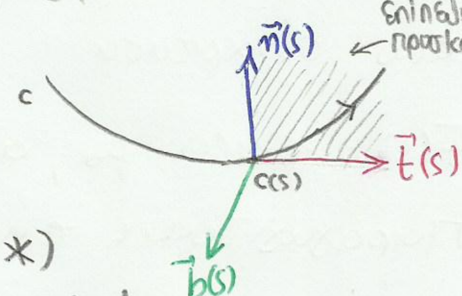
Επομένως, $a(s)$ περιέχεται σε σφαίρα κέντρου p.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ $5^{η}$:

Αν όλα τα επίπεδα προσκολλήσεως μιας κανονικής καμπύλης $c: I \to \mathbb{R}^3$ με $I \subset \mathbb{R}$ με καμπυλότητα $k(s)>0$ παντού στο I, διέρχονται από το ίδιο σημείο P_0, τότε να αποδείξετε ότι η καμπύλη c είναι επίπεδη.

ΛΥΣΗ

Ας είναι καμπύλη c με παράμετρο το μήκος τόξου s και P_0 ένα σημείο όπου διέρχονται όλα τα επίπεδα προσκολλήσεως της c.



Επομένως, θα υπάρχουν
$\lambda=\lambda(s)$ και $\mu=\mu(s)$ τέτοια ώστε

$$P_0 = c(s) + \lambda(s)\vec{t}(s) + \mu(s)\vec{n}(s), \quad \forall s \in I \quad (*)$$

Ελέγχουμε, εάν τα $\lambda(s)$ και $\mu(s)$ παραγωγίσιμα.
Πολλ/ζοντας με $\vec{t}(s)$ και $\vec{n}(s)$ εσωτερικώς, αντίστοιχα.

Έτσι, $<P_0, \vec{t}(s)> = <\vec{t}(s), c(s)> + \lambda(s) + <\vec{t}(s), \vec{b}(s)> \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda(s) = <P_0, \vec{t}(s)> - <\vec{t}(s), c(s)> - <\vec{t}(s), \vec{b}(s)>$$

Άρα, $\lambda(s)$ διαφορίσιμη ως πράξεις διαφορίσιμων. Όμοια και το $\mu(s)$.
Άρα, παραγωγίζοντας την σχέση $(*)$ παίρνουμε:

$$0 = \mathring{c}(s) + \mathring{\lambda}(s)\vec{t}(s) + \lambda(s)\mathring{\vec{t}}(s) + \mathring{\mu}(s)\vec{n}(s) + \mu(s)\mathring{\vec{n}}(s) \Longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{Frenet}]{k(s)>0} 0 = \vec{t}(s) + \mathring{\lambda}(s)\vec{t}(s) + \lambda(s)\cdot k(s)\vec{n}(s) + \mathring{\mu}(s)\vec{n}(s) + \mu(s)(-k(s)\vec{t}(s)+\tau(s)\vec{b}(s))$$

$$\Longrightarrow 0 = (1 + \mathring{\lambda}(s) - k(s)\mu(s))\vec{t} + (\lambda(s)k(s) + \mathring{\mu}(s))\vec{n} + \mu(s)\tau(s)\vec{b} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\text{Γραμ. Ανεξ.}} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \mathring{\lambda}(s) - k(s)\mu(s) = 0 \\ \lambda(s)k(s) + \mathring{\mu}(s) = 0 \\ \mu(s)\tau(s) = 0 \end{array} \right. \quad \Bigg| \quad \forall s \in I$$

Θέλω νδο $\tau(s)=0$. Οπότε, έστω ότι $\exists s_0 \in I : \tau(s_0) \neq 0$ και λόγω ότι η τ συνεχής από θεώρημα Απειροστικού Λογισμού θα διατηρεί πρόσημο σε ένα υποδιάστημα του I. Πιο συγκεκριμένα: $(\exists \varepsilon>0)$: $\tau(s) \neq 0$, $\forall s \in (s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon) = I_0$. Τότε, από την $3^{η}$ εξίσ. αναγκαστικά $\mu(s)=0$, $s \in I_0 \Rightarrow \mathring{\mu}(s)=0$, $s \in I_0$. Τότε, από την $2^{η}$ εξίσ. $\lambda(s)k(s)=0$, $s \in I_0 \Rightarrow \lambda(s)=0$, $s \in I_0$ (Αφού $k(s)>0$)
Αλλά, βάσει αυτών η $1^{η}$ εξίσωση δεν ικανοποιείται. Άτοπο.
Άρα, $\tau(s)=0$, $\forall s \in I \Rightarrow$ Η c καμπύλη είναι επίπεδη

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6η

Δίνεται μία καμπύλη $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα $k(s) > 0$, $s \in I$ και στρέψη $\tau(s)$. Θέτουμε ως $\beta(s) := \vec{t}(s)$, με $\vec{t}(s)$ το εφαπτόμενο διάνυσμα της α

i) ΝΔΟ η β είναι κανονική καμπύλη.

ii) Εάν σ η συνάρτηση μήκους τόξου της β (με αρχή το s_0), νδο $\mathring{\sigma}(s) = k(s)$, $\forall s \in I$.

iii) Να υπολογιστούν, η καμπυλότητα και η στρέψη της καμπύλης β.

ΛΥΣΗ

i) Η α μοναδιαίας ταχύτητας $\Rightarrow$ Καμπύλη με φυσική παράμετρο s.

$$\mathring{\beta}(s) = \mathring{\vec{t}}(s) \xrightarrow[\text{Frenet}]{k(s)>0} k(s) \cdot \vec{n}(s) = \cancel{k(s)} \cdot \frac{\ddot{\alpha}(s)}{\cancel{k(s)}} = \ddot{\alpha}(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\mathring{\beta}(s)\| = \|\ddot{\alpha}(s)\| = k(s) > 0 \Rightarrow \beta \text{ κανονική}$$

ii) Δίνεται: $\sigma(s) := \int_{s_0=0}^{s} \|\mathring{\beta}(u)\| du \Rightarrow \mathring{\sigma}(s) = \|\mathring{\beta}(s)\| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathring{\sigma}(s) = \|\mathring{\vec{t}}(s)\| = \|\ddot{\alpha}(s)\| = k(s), \quad s \in I$$

iii) Έστω $\bar{k}$ και $\bar{\tau}$, καμπυλότητα & στρέψη της β αντίστοιχα.
Η β δεν είναι απαραίτητα μοναδιαίας ταχύτητας.
Έτσι χρησιμοποιούμε τους τύπους τυχαίων μεταβλητών

$$k = \frac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3} \quad \text{και} \quad \tau = \frac{(\beta', \beta'', \beta''')}{\|\beta' \times \beta''\|^2} \quad (*)$$

$$\beta' = \vec{t}' = k \cdot \vec{n} \quad \text{και} \quad \beta'' = k'\vec{n} + k\vec{n}' = -k^2\vec{t} + k'\vec{n} + k\tau\vec{b}$$

$$\beta' \times \beta'' = k\vec{n} \times (-k^2 + k'\vec{n} + k\tau\vec{b}) = k^2\tau\vec{n} + 0\vec{n} + k^3\vec{b}.$$

$$\|\beta' \times \beta''\|^2 = k^4 \cdot (k^2 + \tau^2)^{1/2}$$

$$\beta''' = \ldots = -3kk'\vec{t} + (-k^3 + k'' - k\tau^2)\vec{n} + (2k'\tau + k\tau')\vec{b}$$

Συνεπώς, $\bar{k} = \dfrac{(k^2+\tau^2)^{1/2}}{k}$ & $\bar{\tau} = \dfrac{k\tau' - k'\tau}{k(k^2+\tau^2)}$